Prova scritta di Geometria - 8 febbraio 2020

Svolgere in bella copia, motivando le risposte, i seguenti 10 esercizi.

COGNOME: ______________________ NOME: ______________________

Esercizio 0: Scrivere il proprio Cognome e il proprio Nome, nell'ordine, in stampatello, negli spazi appositi qui sopra.

1. Dire se la conica di equazione

$$4x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x + 8y + 6 = 0$$

   (a) è degenere o non degenere;

   (b) è una ellisse, parabola o iperbole;

   (c) se la conica ha un centro determinarne le coordinate.

   Soluzione.

   (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante

$$-16$$

   La conica è pertanto generale.

   (b)

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

   Si tratta quindi di un'ellisse.

   (c) Infine il centro si trova con le formule

$$\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}} \right) = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{13}{7} \right).$$

2. Calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{p}$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sul piano di equazione $2x - y - z = 0$.

Soluzione. Una base del piano è, per esempio costituita da

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$

Otteniamo in tal modo una base ortogonale (o ortonormale, dopo aver normalizzato) del piano. Per esempio,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ora sfruttiamo la formula (sviluppo di Fourier):

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\mathbf{v}_k$$

La formula qui si semplifica in quanto i denominatori sono tutti uguali a 1. Otteniamo

$$\mathbf{p} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2$$

e quindi

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

3. Dimostrare che se A è una matrice ortogonale di ordine n allora il suo determinante è ± 1.

   Soluzione. Per definizione A è ortogonale se

$$AA^T = A^T A = I$$

   Sappiamo inoltre che $\det(A) = \det(A^T)$ e dunque, applicando il Teorema di Binet:

$$\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2$$

   e, d'altra parte, $\det(AA^T) = \det(I) = 1$. Di conseguenza $(\det A)^2 = 1$ il che implica $\det A = \pm 1$ come richiesto.

4. Siano $z = 1 + 2i$ e $w = 2 - i$ due numeri complessi. Ridurre nella forma $a + ib$ il numero

$$\bar{w} - z^2 + \bar{z} - \frac{\bar{z}}{w} - 5 + 4i$$

Soluzione.

$$2 + i - (1 + 2i)^2 + (1 - 2i) - \frac{1 - 2i}{2 - i} - 5 + 4i = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

5. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio U di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base di U;

(b) Determinare delle equazioni per $U^\perp$.

Soluzione.

(a) La matrice del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è già ridotta a gradini. Essa ha due pivot e due parametri. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = t \\ x_2 = -s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t - 3(-s - t) \\ x_2 = -s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4t + 3s \\ x_2 = -s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

ed una base di soluzioni è data da

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Per le equazioni del complemento ortogonale basta imporre che un generico vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sia ortogonale ai tre vettori trovati al punto precedente:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

(a) Determinare i valori di k per cui la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Determinare i valori di k per cui la matrice $A + A^T$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) L'equazione caratteristica della matrice A è $c_A(x) = x^2 - 5x + 6 - 4k = 0$, che ha soluzioni $\frac{5 \pm \sqrt{1+16k}}{2}$. Se $1 + 16k > 0$ ci sono due autovalori reali e distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile sui reali. Se $1 + 16k < 0$ ci sono due autovalori complessi coniugati e quindi la matrice è diagonalizzabile (sui complessi). L'unico caso ancora dubbio è quando $k = -\frac{1}{16}$ perché in tal caso ci sono due autovalori reali coincidenti uguali a $\frac{5}{2}$. Studiamo quindi il caso $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -\frac{1}{16} & 2 \end{pmatrix}$ e consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 3 & -4 \\ \frac{1}{16} & \frac{5}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1. Ne segue che la molteplicità geometrica è 1 mentre quella algebrica è due: la matrice non è, in questo caso, diagonalizzabile.

(b) Infine: la matrice $A + A^T$ è necessariamente simmetrica (infatti la sua trasposta coincide con essa stessa: $(A + A^T)^T = A^T + A$) e dunque è certamente diagonalizzabile, anzi è ortogonalmente diagonalizzabile, per il Teorema degli Assi Principali.

7. Dire se la seguente permutazione è di classe pari o dispari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Contiamo le inversioni: $5+4+0+0 = 9$. La permutazione è dispari.

8. Calcolare i coseni direttori della retta passante per i punti $A(2,2,1)$ e $B(-2,3,3)$ e orientata nel verso delle z crescenti.

Soluzione.

I parametri direttori si ottengono facendo la differenza delle coordinate, pertanto essi sono proporzionali a

$$\ell = -2 - 2 = -4, \quad m = 3 - 2 = 1, \quad n = 3 - 1 = 2$$

I coseni direttori sono le componenti di un versore parallelo alla retta e quindi quelli della retta con l'orientazione desiderata sono

$$\frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}$$

9. Dato il polinomio $(2x-3)^2 \in \mathbb{P}_2$, scrivere le coordinate $\chi((2x-3)^2)$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$.

   Soluzione. Il polinomio è $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ e le sue coordinate sono

$$\chi((2x-3)^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

10. (a) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1,-1)$, $Q(2,-4)$, $R(3,-9)$.

(b) Qual è il suo centro?

(c) Quanto vale il suo raggio?

Soluzione. Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 1+1+a-b+c=0 \\ 4+16+2a-4b+c=0 \\ 9+81+3a-9b+c=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a-b+c=-2 \\ 2a-4b+c=-20 \\ 3a-9b+c=-90 \end{cases}$$

Poichè i tre punti non sono allineati la matrice dei coefficienti di questo sistema è invertibile, e la forma a gradini ridotta della matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -20 \\ 3 & -9 & 1 & -90 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & -36 \end{pmatrix}$$

La circonferenza ha quindi equazione:

$$\boxed{x^2+y^2+60x+26y-36=0}$$

Completando i quadrati si ottiene

$$(x^2+60x+30^2)+(y^2+26y+13^2)=36+30^2+13^2$$

ossia

$$(x+30)^2+(y+13)^2=1105$$

Dunque il raggio è

$$r=\sqrt{1105}$$

e il centro

$$(-30,-13).$$